Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Déterminants

1. Applications multilinéaires

1.1. Applications p-linéaires

Définition :

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $p\in\mathbb{N}^*$. Une application $f : E^p\to F$ est dite p-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables : $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\forall \vec{y},\vec{z}\in E$, $\forall \lambda\in\mathbb{K}$,
$f(\vec{x_1},\dots,\overrightarrow{x_{i-1}},\lambda\vec{y}+\vec{z},\overrightarrow{x_{i+1}},\dots,\vec{x_p})=\lambda f(\vec{x_1},\dots,\overrightarrow{x_{i-1}},\vec{y},\overrightarrow{x_{i+1}},\dots,\vec{x_p})+f(\vec{x_1},\dots,\overrightarrow{x_{i-1}},\vec{z},\overrightarrow{x_{i+1}},\dots,\vec{x_p})$

Définition :

On note $\mathscr{L}_p(E,F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E^p dans F.

1.2. Applications symétriques

Définition :

Une application p-linéaire est dite symétrique si elle est invariante quand on échange deux vecteurs :
$\forall i,j\in[\![1,p]\!]$, $i<j$, $\forall(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})\in E^p$,
$f(\vec{x_1},\dots,\overrightarrow{x_{i-1}},\vec{x_i},\overrightarrow{x_{i+1}},\dots,\overrightarrow{x_{j-1}},\vec{x_j},\overrightarrow{x_{j+1}},\dots,\vec{x_p})=f(\vec{x_1},\dots,\overrightarrow{x_{i-1}},\vec{x_j},\overrightarrow{x_{i+1}},\dots,\overrightarrow{x_{j-1}},\vec{x_i},\overrightarrow{x_{j+1}},\dots,\vec{x_p})$
On notant τ la transposition $(i,j)_p$, on a : $f(\overrightarrow{x_{\tau(1)}},\dots,\overrightarrow{x_{\tau(i)}},\dots,\overrightarrow{x_{\tau(p)}})=f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_p})$
Comme les transpositions engendrent le groupe symétrique, on obtient :
$\forall\sigma\in S_n$, $\forall(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})\in E^p$, $f(\overrightarrow{x_{\sigma(1)}},\dots,\overrightarrow{x_{\sigma(p)}})=f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})$

1.3. Application antisymétrique ou alternée

Définition :

Une application f p-linéaire est dite alternée si $\forall(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})\in E^p$, $\forall i,j\in[\![1,p]\!]$, $i\neq j$,
$x_i=x_j \Rightarrow f(\vec{x_1},\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p)=\vec{0_F}$.
Une application f p-linéaire est dite antisymétrique si $\forall(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})\in E^p$, $\forall i,j\in[\![1,p]\!]$, $i\neq j$,
$f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_p})=-f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_p})$

Proposition :

Soit f une application p-linéaire. f est antisymétrique $\Leftrightarrow$ f est alternée.

Preuve :

$\Rightarrow$: $\forall(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})\in E^p$, $\forall i\neq j$, si $\vec{x_i}=\vec{x_j}$
$f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_p})=-f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots\vec{x_i},\dots\vec{x_p})$ car f est antisymétrique
Donc $f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})=\vec{0_F}$ donc f est alternée.

$\Leftarrow$: $\forall i,j\in[\![1,p]\!]$, $i\neq j$, $\forall(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})\in E^p$

$$f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i}+\vec{x_j},\dots,\vec{x_i}+\vec{x_j},\dots,\vec{x_p})=\vec{0_F}=\underbrace{f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_p})}_{=0}+\underbrace{f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_p})}_{=0}$$
$$+f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_p})+f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_p})$$

Donc $f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_p})=-f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_p})$ donc f est antisymétrique.

Remarque :

Soient f une application antisymétrique ou alternée, $i,j\in[\![1,n]\!]$, $i\neq j$, $\tau=(i,j)_n$
$\forall(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})\in E^p$, $f(\overrightarrow{x_{\tau(1)}},\dots,\overrightarrow{x_{\tau(i)}},\dots,\overrightarrow{x_{\tau(j)}},\dots,\overrightarrow{x_{\tau(p)}})=f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_p})=-f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_i},\dots,\vec{x_j},\dots,\vec{x_p})$
Si σ est le produit de k transpositions on obtient : $f(\overrightarrow{x_{\sigma(1)}},\dots,\overrightarrow{x_{\sigma(p)}})=(-1)^k f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})=\varepsilon(\sigma)f(\vec{x_1},\dots,\vec{x_p})$

Proposition :

– L'ensemble des applications p-linéaires symétriques forme un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_p(E,F)$.
– L'ensemble des applications p-linéaires antisymétriques forme un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_p(E,F)$.

1.4. Image d'une famille liée par une application alternée

Proposition :

Soient $f : E^p \to F$ une application p-linéaire alternée, $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)$ une famille liée. Alors $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)=\vec{0}_F$.

Preuve :

$(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)$ est liée, on peut donc supposer que $\vec{x}_1\in\mathrm{Vect}(\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p)$: $\exists(a_2,\dots,a_p)\in\mathbb{K}^{p-1}$ tel que $\vec{x}_1=\sum_{k=2}^{p} a_k\vec{x}_k$

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)=f\left(\sum_{k=2}^{p} a_k\vec{x}_k,\dots,\vec{x}_p\right)=a_2\underbrace{f(\vec{x}_2,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p)}_{=\vec{0}_F}+\dots+a_k\underbrace{f(\vec{x}_k,\dots,\vec{x}_k,\dots,\vec{x}_k)}_{=\vec{0}_F}+\dots+a_p\underbrace{f(\vec{x}_p,\dots,\vec{x}_p)}_{=\vec{0}_F}=\vec{0}_F.$$

2. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

2.1. Problème

Position du problème :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $f : E^n\to\mathbb{K}$ une application n-linéaire et alternée,
$\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E, $X=(\vec{x}_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E,
$A=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(X)$ c'est-à-dire $\forall j$, $\vec{x}_j=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{e}_i$.
Que vaut $f(X)$?

Cas particulier :

Si l'on a $n=2$, $\vec{x}_1=a_{1,1}\vec{e}_1+a_{2,1}\vec{e}_2$, $\vec{x}_2=a_{1,2}\vec{e}_1+a_{2,2}\vec{e}_2$.

$$\begin{aligned}f(\vec{x}_1,\vec{x}_2)&=f(a_{1,1}\vec{e}_1+a_{2,1}\vec{e}_2,a_{1,2}\vec{e}_1+a_{2,2}\vec{e}_2)\\&=a_{1,1}a_{1,2}f(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+a_{1,1}a_{2,2}f(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+a_{2,1}a_{1,2}f(\vec{e}_2,\vec{e}_1)+a_{2,1}a_{2,2}f(\vec{e}_2,\vec{e}_2)\\&=(a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2})f(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\\&=\begin{vmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{vmatrix}f(\vec{e}_1,\vec{e}_2)\end{aligned}$$

f ne dépend que des coordonées des $\vec{x}_i$ dans la base $\mathscr{B}$ et de $f(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Cas général :

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1}\vec{e}_i,\dots,\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}\vec{e}_i\right)$$

Quand on développe, on obtient n^n termes, nuls dès qu'il y a deux vecteurs identiques.
Il ne reste alors que les $n!$ termes obtenus en permutant $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$.

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=\sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}f(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}},\dots,\overrightarrow{e_{\sigma(n)}})=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}f(\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n)$$

Définition :

On appelle détermiant de la famille X dans la base $\mathscr{B}$ et on note $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(X)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$.

Définition :

On note $\Lambda_n^*(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

Proposition :

$\text{Det}_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée non nulle.

Preuve :

- $\forall X \in E^P$, $\text{Det}_{\mathscr{B}}(X) \in \mathbb{K}$ donc $\text{Det}_{\mathscr{B}}$ est une forme.
- L'application p_i : $\vec{x}_j \mapsto a_{i,j}$ est linéaire et l'application : $(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto z_1 z_2 \dots z_n$ est n- linéaire
  Donc $\text{Det}_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire.
- $\text{Det}_{\mathscr{B}}$ est non nulle car $\text{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})=1$: En effet, $\vec{e}_j = 0\vec{e}_1 + \dots + 1\vec{e}_j + \dots + 0\vec{e}_n$, donc $a_{i,j} = \delta_{i,j}$
  $\text{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\delta_{\sigma(1),1} \dots \delta_{\sigma(n),n}$, mais seule la permutation e ne donne pas 0 :
  Ainsi, $\text{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \varepsilon(e)\delta_{e(1),1} \dots \delta_{e(n),n} = 1$ donc $\text{Det}_{\mathscr{B}}$ est non nulle.
- Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i < j$, et $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ tel que $\vec{x}_i = \vec{x}_j$.
  $$\text{Det}_{\mathscr{B}}(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in A_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=1} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma \in S_n \setminus A_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=-1} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$$
  Soient $\tau = (i, j)_n$ et φ : $\begin{array}{ccc} A_n & \to & S_n \setminus A_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma\tau \end{array}$
  $\forall \rho \in S_n \setminus A_n$, $\varphi(\sigma) = \rho \Leftrightarrow \sigma\tau = \rho \Leftrightarrow \sigma = \rho\tau \in A_n$ donc φ est bijective.
  $$\begin{aligned} \text{Det}_{\mathscr{B}}(X) &= \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma\tau(1),1} \dots a_{\sigma\tau(i),i} \dots a_{\sigma\tau(j),j} \dots a_{\sigma\tau(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(i),i} \dots a_{\sigma(j),j} \dots a_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(j),i} \dots a_{\sigma(i),j} \dots a_{\sigma(n),n} \end{aligned}$$
  Or, $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ donc : $\begin{cases} a_{\sigma(j),i} = a_{\sigma(j),j} & (\sigma(j)^{\text{ème}} \text{ coordonnées du vecteur } \vec{x}_i = \vec{x}_j) \\ a_{\sigma(i),j} = a_{\sigma(i),i} & (\sigma(i)^{\text{ème}} \text{ coordonnées du vecteur } \vec{x}_j = \vec{x}_i) \end{cases}$
  Donc $\text{Det}_{\mathscr{B}}(X) = 0$ donc $\text{Det}_{\mathscr{B}}$ est alternée.

Corollaire :

$\dim(\Lambda_n^*(E)) = 1$

Preuve :

$\forall f \in \Lambda_n^*(E)$, $\forall X \in E$, $f(X) = \text{Det}_{\mathscr{B}}(X) f(B)$. Notons $\lambda = f(B) \in \mathbb{K}$ (f est une forme) : On a alors $f = \text{Det}_{\mathscr{B}} \times \lambda$
Donc $\Lambda_n^*(E) = \text{Vect}(\text{Det}_{\mathscr{B}}) \Rightarrow \dim(\Lambda_n^*(E)) = 1$ ($\text{Det}_{\mathscr{B}}$ est non nulle)

2.2. Changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $X \in E^n$.
$\text{Det}_{\mathscr{B}'} \in \Lambda_n^*(E)$, donc $\text{Det}_{\mathscr{B}'}(X) = \text{Det}_{\mathscr{B}'}(B) \times \text{Det}_{\mathscr{B}}(X)$
Si $X = \mathscr{B}'$ on obtient alors : $\text{Det}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}') = 1 = \text{Det}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \text{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$
$\Rightarrow$ $\text{Det}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$ et $\text{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ sont non nuls et inverses l'un de l'autre.

2.3. Caractérisation des bases

Théorème :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E, $X \in E^n$. X est une base de $E \Leftrightarrow \text{Det}_{\mathscr{B}}(X) = 0$.

Preuve :

$\Rightarrow$: $\text{Det}_X(\mathscr{B}) \times \text{Det}_{\mathscr{B}}(X) = 1 \Rightarrow \text{Det}_{\mathscr{B}}(X) \neq 0$
$\Leftarrow$: Par l'absurde, si X est liée : on a alors $\text{Det}_{\mathscr{B}}(X) = 0$ (proposition du 1.4.) : Impossible.
Donc X est libre et de cardial $n = \dim(E)$, il s'agit donc d'une base de E.

3. Déterminant d'un endomorphisme

3.1. Invariance par changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E, $u\in\mathscr{L}(E)$.
$u(\mathscr{B})=(u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_n))$
Soient $\mathscr{B}'$ une autre base de E, et f telle que $\forall X\in E^n$, $f(X)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}'}(u(X))$
$f\in\Lambda_n^*(E)$ donc $f(X)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(X)f(\mathscr{B})$
Si $X=\mathscr{B}'$: on obtient $f(\mathscr{B}')=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}'}(u(\mathscr{B}'))=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')f(\mathscr{B})=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\mathrm{Det}_{\mathscr{B}'}(u(\mathscr{B}))$
$=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\mathrm{Det}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$

Définition :
On appelle déterminant de u et on note $\mathrm{Det}(u)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$.

Remarque :
$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(u(X))=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(X)\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))=\mathrm{Det}(u)\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(X)$.

3.2. Propriétés

Propriétés :
1. $\forall u,v\in\mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Det}(u\circ v)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(u(v(\mathscr{B})))=\mathrm{Det}(u)\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(v(\mathscr{B}))=\mathrm{Det}(u)\mathrm{Det}(v)$
2. $\forall u\in\mathscr{L}(E)$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\mathrm{Det}(\lambda u)=\mathrm{Det}(\lambda\,\mathrm{Id}\circ u)=\mathrm{Det}(\lambda\,\mathrm{Id})\mathrm{Det}(u)=\lambda^n\mathrm{Det}(u)$

Théorème de caractérisation des automorphismes :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $u\in\mathscr{L}(E)$.
u est un automorphisme $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}(u)\neq 0$, et alors $\mathrm{Det}(u^{-1})=\dfrac{1}{\mathrm{Det}(u)}$

Preuve :
Soit $\mathscr{B}$ une base de E. u est un automorphisme $\Leftrightarrow$ $u(\mathscr{B})$ est une base de E $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}(u)=0$
$\mathrm{Det}(u\circ u^{-1})=\mathrm{Det}(\mathrm{Id})=1$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Det}(u^{-1})=\dfrac{1}{\mathrm{Det}(u)}$

Remarque :
Det est un morphisme du groupe $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ vers le groupe $(\mathbb{K}^*,\times)$, surjectif et non injectif.
$\lambda=\mathrm{Det}\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$

4. Déterminant d'une matrice carrée

4.1. Définition

Définition :
Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})=(a_{i,j})$. On peut associer à A :
– une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Si on note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $A=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_n)$
– un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $A=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$
On a alors $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_n)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u))$
On définit alors $\mathrm{Det}(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$

4.2. Propriétés

Propriétés :

Soit $\theta : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}$ θ est un isomorphisme. On obtient :

1. $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{Det}(AB) = \operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(B)$
2. $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \operatorname{Det}(\lambda A) = \lambda^n \operatorname{Det}(A)$

Théorème :

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A \text{ est inversible } \Leftrightarrow \operatorname{Det}(A) \neq 0,\ \text{ et alors } \operatorname{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(A)}}$$

Proposition :

$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{Det}({}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{Det}(A)$.

Preuve :

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A = (a_{i,j}),\ {}^{\mathrm{t}}A = (a'_{i,j})$.

$$\operatorname{Det}({}^{\mathrm{t}}A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a'_{\sigma(k),k} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(k),k}$$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} S_n & \to & S_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma^{-1} \end{array}$ φ est bijective, en effet $\forall \tau \in S_n,\ \varphi(\sigma) = \tau \Leftrightarrow \sigma^{-1} = \tau \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in S_n$

On a alors, sachant que $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma)$: $\operatorname{Det}({}^{\mathrm{t}}A) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \prod_{k=1}^{n} a_{\tau(k),k} = \operatorname{Det}(A)$.

Remarque :

Avec cette proposition, on peut effectuer aussi des opérations sur les lignes du déterminant.

Propriété :

Soit A la matrice : $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{Det}(A) = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$

Preuve :

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$$

Si $\sigma \neq e$, alors $\exists k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(k) > k$. Pour le démontrer, supposons que ce n'est pas le cas : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sigma(k) \leqslant k$

On a alors :

$$\begin{array}{l} \sigma(1) \leqslant 1 \Rightarrow \sigma(1) = 1 \\ \sigma(2) \leqslant 2 \Rightarrow \sigma(2) = 2 \\ \quad \vdots \\ \sigma(n) \leqslant n \Rightarrow \sigma(n) = n \end{array}$$

On obtient $\sigma = e$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc la propriété est vraie.

$\sigma(k) > k \Rightarrow a_{\sigma(k),k} = 0 \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} = 0$ Donc $\operatorname{Det}(A) = \varepsilon(e) \prod_{k=1}^{n} a_{e(k),k} = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

Remarque :

Ce résultat se vérifie aussi pour une matrice triangulaire inférieure, à l'aide de $\operatorname{Det}({}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{Det}(A)$.

Proposition :

Soit $A=\left(\begin{array}{c|ccc} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ A est une matrice par blocs de dimension n, la matrice B est de dimension $n-1$.
On a alors $\mathrm{Det}(A)=a_{1,1}\,\mathrm{Det}(B)$.

Preuve :

$\mathrm{Det}(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\,a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$

Si $\sigma(1)\neq 1$, alors $a_{\sigma(1),1}=0$ Donc $\mathrm{Det}(A)=\sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(1)=1}}\varepsilon(\sigma)\,a_{1,1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n}$

σ se restreint donc en une permutation de $[\![2,\dots,n]\!]$ et comme $b_{i,j}=a_{i+1,j+1}$, on peut écrire :

$\mathrm{Det}(A)=a_{1,1}\sum_{\tau\in S_{n-1}}\varepsilon(\tau)\,b_{\tau(1),1}\dots b_{\tau(n-1),n-1}=a_{1,1}\,\mathrm{Det}(B)$. (en effet, $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\tau)$ car σ et τ ont les mêmes inversions)

Remarque :

Ce résultat se généralise : $\mathrm{Det}\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ \begin{matrix} p & \quad q \end{matrix} & \end{array}=\mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)$

5. Calcul pratique d'un déterminant

5.1. Opérations élémentaires

Soit $A=(a_{i,j})=\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_1 & \cdots \\ \vdots & \\ L_n & \cdots \end{pmatrix}$

Soit $\mathscr{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$\mathrm{Det}(A)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_n)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(L_1,\dots,L_n)$

Propriétés :

1. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,\alpha C_i,\dots,C_n)=\alpha\,\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)$
2. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n)=-\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n)$
3. $\forall\sigma\in S_n$, $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_{\sigma(1)},\dots,C_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\,\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_n)$
4. $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_i+\alpha C_j,\dots,C_n)=\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)$

Proposition : déterminant de Vandermonde :

Soient $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$. On appelle déterminant de Vandermonde et on note $\mathrm{D}(a_0,\dots,a_n)$ le déterminant :

$$\mathrm{D}(a_0,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

On a : $\mathrm{D}(a_0,\dots,a_n)=\prod_{i>j}(a_i-a_j)$.

Preuve :

Le principe est de retrancher à chaque colonne la colonne précédente multipliée par a_0 en commençant par la fin.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1-a_0 & \dots & a_1^{n-2}(a_1-a_0) & a_1^{n-1}(a_1-a_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n-a_0 & \dots & \dots & a_n^{n-1}(a_n-a_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-a_0 & \dots & a_1^{n-1}(a_1-a_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_n-a_0 & \dots & a_n^{n-1}(a_n-a_0) \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-a_0)(a_2-a_0)\dots(a_n-a_0)\times \mathrm{D}(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

$$=(a_1-a_0)(a_2-a_0)\dots(a_n-a_0)\times(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\times \mathrm{D}(a_2,a_3,\dots,a_n)$$

$$=\dots$$

$$=\prod_{i>j}(a_i-a_j)$$

5.2. Développement

Définition :

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i,j\in[\![1,n]\!]$.

1. On appelle mineur de $a_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en retirant la ligne i et la colonne j. On le note $\Delta_{i,j}$.
2. On appelle cofacteur de $a_{i,j}$, $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Proposition : développement suivant une colonne :

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\forall j\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Det}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$

Preuve :

Soient $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A.

$$\mathrm{Det}(A)=\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_j,\dots,C_n)=\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{e}_i,\dots,C_n)=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{j-1},\vec{e}_i,C_{j+1},\dots,C_n)$$

Il reste à prouver que $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{j-1},\vec{e}_i,C_{j+1},\dots,C_n)=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{j-1},\vec{e}_i,C_{j+1},\dots,C_n)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & \vdots & & & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & & & 0 & & & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & & & 1 & & & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & & & 0 & & & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On effectue sur les colonnes le cycle $c_c=(1,2,\dots,j)_n$ et sur les lignes le cycle $c_l=(1,2,\dots,i)_n$

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{j-1},\vec{e}_i,C_{j+1},\dots,C_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & & & & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}\times\varepsilon(c_c)\varepsilon(c_l)=1\times\Delta_{i,j}\times(-1)^{j-1}(-1)^{i-1}$$

Remarque :

De même avec les lignes, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Det}(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

6. Applications

6.1. Orientation des bases

Définition :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases différentes de E.
$\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\neq 0$, on a donc soit $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')<0$, soit $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')>0$.
Si $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')>0$, on dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont la même orientation.
Si $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')<0$, on dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont des orientations contraires.
Orienter l'espace, c'est choisir une base de référence orientée positivement, dite directe.

6.2. Comatrice

Définition :

On appelle comatrice de A et on note $\mathrm{Com}(A)$ la matrice des cofacteurs : $\mathrm{Com}(A)_{i,j}=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Proposition :

$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad A\times{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)={}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)\times A=\mathrm{Det}(A)I_n$.

Preuve :

Notons $C=A\times{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)$

$c_{i,k}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)_{j,k}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{k+j}\Delta_{k,j}$

1^er^ cas : Si $k=i$: $c_{i,i}=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}=\mathrm{Det}(A)$ (Développement suivant la ligne i de $\mathrm{Det}(A)$)

2^ème^ cas : Si $k\neq i$: Soit A' la matrice obtenue à partir de A en recopiant la ligne i dans la ligne k.
A' a deux lignes identiques $\Rightarrow$ $\mathrm{Det}(A')=0$
En développant suivant la ligne k : $\mathrm{Det}(A')=\sum_{j=1}^{n} a'_{k,j}(-1)^{k+j}\Delta'_{k,j} \Leftrightarrow 0=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{k+j}\Delta_{k,j}=c_{i,k}$

Donc $C=\mathrm{Det}(A)I_n$.

Corollaire :

Si $\mathrm{Det}(A)\neq 0$, $A^{-1}=\dfrac{{}^{t}\mathrm{Com}(A)}{\mathrm{Det}(A)}$

6.3. Systèmes de Cramer

Soit S : $\begin{cases} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}=b_1\\ \vdots\\ a_{p,1}+\ldots+a_{p,n}=b_p\end{cases}$ système de p équations à n inconnues avec second membre.

Interprétations possibles de ce système :

− Intersections de p hyperplans affines.

− u : $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n\\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & (a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n\ ,\ \ldots\ ,\ a_{n,1}x_1+\ldots+a_{n,n}x_n)\end{array}\in\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$

Alors $S \Leftrightarrow u(\vec{x})=\vec{b}$: équation linéaire de solution soit $\emptyset$, soit un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(u)$

− $A=(a_{i,j})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_p\end{pmatrix}$

Alors $S \Leftrightarrow AX=B$

Dans le cas des systèmes de Cramer, c'est-à-dire $n=p$, et avec A inversible, on obtient $X=A^{-1}B$.

Proposition :

Dans le cas des systèmes de Cramer, et en reprenant les éléments définis précédemment,
les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall \vec{b}$, S admet une unique solution
2. Pour $\vec{b}=\vec{0}$, S admet une unique solution
3. u est bijective
4. A est inversible ($\operatorname{Det}(A)\neq 0$)

Dans ce cas, $\forall i$, $x_i=\dfrac{\operatorname{Det}(A_i)}{\operatorname{Det}(A)}$ où la matrice A_i est obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne par le second membre B.

Preuve :

1. ⇒ 2. : Évident.

2. ⇒ 3. : 2. ⇒ $\operatorname{Ker}(u)=\{\vec{0}\}$ ⇒ u injective ⇒ u bijective (car $u\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$)

3. ⇔ 4. : Évident.

3. ⇒ 1. : $u(\vec{x})=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}=u^{-1}(\vec{b})$ Unique solution.

Notons $\mathcal{B}=(\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,
et $C_1,C_2,\dots,C_n$ les colonnes de A_i, avec $C_i=B=x_1C_1+x_2C_2+\dots+x_nC_n$

$$\operatorname{Det}(A_i)=\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,C_2,\dots,C_{i-1},B,C_{i+1},\dots,C_n)=\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}\left(C_1,C_2,\dots,C_{i-1},\sum_{k=1}^{n}x_kC_k,C_{i+1},\dots,C_n\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,C_2,\dots,C_k,\dots,C_n)=0+\dots+0+x_i\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,C_2,\dots,C_i,\dots,C_n)+0+\dots+0=x_i\operatorname{Det}(A).$$

* * * * *